

DOI: <https://doi.org/10.36719/2663-4619/125/194-198>

Minarə Əliyeva

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti
magistrant

<https://orcid.org/0009-0000-5833-217X>

minareeliyeva2202@gmail.com

Helmholts tənliyinin ədədi həlli üçün sonlu fərqlər metodunun tətbiqi və təhlili

Xülasə

Bu məqalədə biz Helmholtz tənliyinin ədədi həlli üçün sonlu fərqlər metodunun tətbiqi və təhlilini araşdıracağıq. Helmholtz tənliyi riyazi fizikanın əsas tənliklərindən biridir. Helmholtz tənliyini alman fiziki və riyaziyyatçısı Hermann von Helmholtz dalğa proseslərinin riyazi təsvirini sadələşdirmək üçün formalaşdırıb. Bu tənlik akustikada, dalğa yayılması, elektromaqnit dalğaları, istilikkeçirmə və digər proseslərdə istifadə olunur. Helmholtz tənliyinin analitik həlli yalnız sadə həndəsi formalara malik sahələrdə və seçilmiş sərhəd şərtlərində hesablanı bilər. Mürəkkəb proseslərdə, qeyri-bircins mühitlərdə və real fiziki prosesləri əks etdirən sərhəd şərtləri üçün analitik həll tapmaq çətin və ya mümkün olmur. Buna görə də tənliyin təqribi həlləri araşdırılır və ədədi üsullardan istifadə olunur. Bu məqalədə biz diferensial tənliyin sonlu fərqlər üsulu ilə cəbri tənliklər sisteminə gətirilməsi və alınan sistem tənliyin həlli məsələlərinə nəzər salacağıq.

Açar sözlər: Helmholtz tənliyi, sonlu fərqlər metodu, elektromaqnit dalğaları, ədədi həll, riyazi fizika, diferensial tənlik

Minara Aliyeva

Azerbaijan State Oil and Industry University

Master's student

<https://orcid.org/0009-0000-5833-217X>

minareeliyeva2202@gmail.com

Application and Analysis of the Finite Difference Method for the Numerical Solution of the Helmholtz Equation

Abstract

In this article, we will study the application and analysis of the finite difference method for the numerical solution of the Helmholtz equation. The Helmholtz equation is one of the fundamental equations of mathematical physics. The Helmholtz equation was formulated by the German physicist and mathematician Hermann von Helmholtz to simplify the mathematical description of wave processes. This equation is used in acoustics, wave propagation, electromagnetic waves, thermal dissipation, and other processes. The analytical solution of the Helmholtz equation can be calculated only for domains with simple geometric shapes and with selected boundary conditions. In complex processes, inhomogeneous environments, and for boundary conditions reflecting real physical processes, it is difficult or impossible to find an analytical solution. Therefore, approximate solutions of the equation are investigated, and numerical methods are used.

In this article, we will consider the problems of reducing the differential equation to a system of algebraic equations using the finite difference method and solving the resulting system of equations.

Keywords: Helmholtz equation, finite difference method, electromagnetic waves, numerical solution, mathematical physics, differential equation

Giriş

Helmholts tənliyinin analitik və ədədi həlləri mövcuddur. Ədədi həllərdən ən çox istifadə olunanlar bunlardır: sonlu fərqlər metodu (FDM), sonlu elementlər metodu (FEM), spektral metodlar. Sonlu fərqlər metodu bu sahədə daha geniş tətbiq edilən üsullardan biridir. Helmholtz tənliyinin sonlu fərqlər metodu ilə həlli, həmçinin tənliklə bağlı müxtəlif məsələlər bir neçə məşhur məqalələrdə təsvir edilmişdir (Brenner və Scott, 2008).

Analitik həllər Helmholtz tənliyi üçün yalnız müəyyən sadə həndəsi sahələrdə və sərhəd şərtlərində mövcuddur, mürəkkəb geometrik formalar və real fiziki sərhəd şərtləri üçün onların tapılması çətin və ya qeyri-mümkün olur. Bu çətinlik fenomeni xüsusilə sonsuz və ya qeyri-adi sərhəd şərtlərinə sahib problemlərdə daha açıq şəkildə özünü göstərir və analitik üsullarla sərhəd problemi həllini ciddi şəkildə məhdudlaşdırır (Johnson, 2009).

Helmholts tənliyinin daha bir həll üsulu da geniş yayılmışdır. Bu üsul Adomian dekompozisiya üsuludur. Sonlu fərqlər metodu ilə Adomian dekompozisiya metodunun üstünlüyü və fərqlilikləri müqayisə edilir (Wang və b., 2018). Dekompozisiya metodu bu tip tənliklərin həm analitik, həm də təxmini ədədi həllini sadə və diskretləşdirmə tələb etmədən əldə etməyə imkan verir (Nəbiyeva, 2025).

Əlavə olaraq, Helmholtz tənliyi üçün kifayət qədər ədədi və analitik metodların keyfiyyəti və tətbiqi sahəsində çoxlu işlər görülmüşdür: iterativ metodlar, spektral metodlar və digər diskretləşmə yanaşmaları hesablanmışdır (Saad, 2003; Zhang, 2014).

Son iyirmi ildə Helmholtz tənliyi üçün sonlu fərq üsullarının inkişafı haqqında müxtəlif qısa icmallar təqdim olunur. Faza xətasına əsaslanaraq, bu məqalədə 1D, 2D və 3D-də nəticələr verilmiş, müxtəlif sxemlərin fərqi və əlaqəsi də göstərilmişdir, xüsusən Helmholtz tənliyini yüksək dalğa nömrələri ilə həll etmək üçün müraciət edərkən hesablama effekti, üstəlik, yüksək dalğa nömrələri problemlərinin yaxınlaşmasında mövcud olan bəzi əsas problemlər müzakirə edilmişdir (Strikwerda, 2004).

Tədqiqat

Bu tədqiqatda Helmholtz tənliyinin ədədi həlli üçün sonlu fərqlər metodundan istifadə olunmuşdur. Araşdırmanın əsas məqsədi diferensial tənliyin diskretləşdirilməsi yolu ilə cəbri tənliklər sisteminə çevrilməsi və bu sistemin ədədi həllinin təhlil edilməsidir. Tədqiqat ikiölçülü sahə üçün aparılmış və metodun dəqiqliyi, sabitliyi və yaxınlaşma xassələri araşdırılmışdır (Courant və Hilbert, 2008).

Helmholtz tənliyinin həlli üçün sonlu fərqlər metodunun tətbiqi Samarski (1989), Strikwerda (2004) və LeVeque (2007) kimi müəlliflərin işlərində geniş şəkildə araşdırılmışdır. Xüsusi yüksək sürətlərdə yaranan cəbri sistemlərin həlli Ernst və Gander (2012) əsasında yaradılmışdır (Shah və b., 2021).

Məsələnin qoyuluşu

$$\Delta u + s^2 u = 0 \quad (1)$$

Bu tənliyə Helmholtz tənliyi deyilir və araşdırma zamanı bu tənlikdən istifadə edəcəyik.

$u(x,y)$ – axtarılan funksiya

s - dalğa parametri

Törəmələrin yaxınlaşması

Sonlu fərqlər metodunu tətbiq etmək üçün funksiyanın törəmələrini yalnız funksiyanın müəyyən nöqtələrindəki qiymətləri əsasında təxmini hesablamaqlıyıq (Helmholtz, 1860). Əgər $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ olarsa, onda

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots, \quad (2)$$

və buna uyğun olaraq

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \quad (3)$$

Bu ifadələri çıxdıqda aşağıdakı alınır

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + O(h^3) \quad (4)$$

Sonda funksiyanın törəməsi aşağıdakı kimi ifadə olunur

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \quad (5)$$

Burada xəta anlayışı $O(h^2)$ olur. Həmçinin (2) və (3) ifadələrini tərəf-tərəfə topladıqda aşağıdakı alınır

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2f''(x) + O(h^4) \quad (6)$$

Onda $f''(x)$ belə alınır

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \quad (7)$$

Buna oxşar qaydada f funksiyanın qismən törəmələri təxmini belə hesablanır

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y)}{2h}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \approx \frac{u(x, y+k) - u(x, y-k)}{2k}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \approx \frac{u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)}{k^2}. \quad (11)$$

Sonlu fərqlər metodu

$R=[a, b] \times [c, d]$ R^2 -də Dözbucaqlı oblast olsun və aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq.

$$\begin{cases} \Delta u + s^2 u = 0, & R - d\partial, \\ u(x, y) = f(x, y), & \partial R - d\partial. \end{cases} \quad (12)$$

Bu məsələyə sonlu fərqlər metodunu tətbiq etmək üçün əvvəlcə R -ni (x_i, y_i) formalı $n \times m$ torla yaxınlaşdırırıq (İserles, 2009).

$$x_i = a + (i-1)h, \quad h := \frac{b-a}{n-1}, \quad y_j = c + (j-1)k, \quad k := \frac{d-c}{m-1} \quad (13)$$

Hər hansı verilmiş bir tor nöqtəsi (x, y) üçün (10) və (11) dən istifadə edək

$\Delta u + s^2 u = 0$ tənliyi aşağıdakı kimi yazmaq

$$\frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2} + \frac{u(x,y+k)-2u(x,y)+u(x,y-k)}{k^2} + s^2 u(x,y) = 0 \quad (14)$$

$\frac{k^2}{h^2} = r$ götürsək (14) ifadəsi aşağıdakı beşnöqtəli formulaya sadələşir:

$$ru(x+h,y) + ru(x-h,y) + u(x,y+k) + u(x,y-k) + (s^2 k^2 - 2r - 2)u(x,y) = 0$$

Sonda, hər bir tor nöqtəsi üçün, u -nün qiymətlərini özündə əks etdirən oxşar xətti tənlik yazmaq bilərik. Burada u -nün qiymətləri sərhəd boyu məlum, $(n-2)(m-2)$ tor nöqtələrində isə məlum olmadığından, həll etmək üçün $(n-2)(m-2)$ tənliklərindən və $(n-2)(m-2)$ dəyişənlərindən ibarət xətti sistem yaradır. İndi isə $(n-2)(m-2)$ dəyişənlərini z_k ilə nömrələyək (Antoine və b., 2014).

$$z_k = u(x_i, y_i) \quad k = (j-2)(n-2) + i - 1.$$

Bu xətti tənliklər sistemimizi $A\bar{z} = \bar{b}$ şəklində yazmağa imkan verir, burada

$$A \text{ } (n-2)(m-2) \times (n-2)(m-2) \text{ matrisidir.}$$

Bu sistemi həll etməklə biz daxili tor nöqtələrində u üçün təxmini qiymət əldə edirik və bu həll (12) tənliyinin ədədi həlli adlanır (Evans, 2010).

(12) tənliyini daha rahat həll etmək üçün MATLAB proqramında yuxarıdakı alqoritmləri yazaraq tənliklər sistemini həll etmək olar. Bu nümunədə biz tənliyi beşnöqtəli sxem şəklində yazmışıq həmçinin doqquznöqtəli sxemdən də istifadə edilir. Doqquznöqtəli sxem daha əlverişlidir və daha dəqiq həll tapmağa kömək edir (El-Sayed və Kaya, 2004).

Nəticə

Bu məqalədə biz Helmholtz tənliyinin ədədi həlli üçün sonlu fərqlər metodunun tətbiqi və təhlili aparmışıq. Tədqiqat çərçivəsində ikiölçülü Helmholtz tənliyi üçün törəmələri yaxınlaşdırıb, qismən törəmələri tapmışıq və düzbucaqlı oblastda beşnöqtəli sxemə sadələşdirmişik. Sonda alınan xətti tənliyi müxtəlif üsullarla həll etmək olar. Əlverişli üsullardan biri də Yakobi və Gauss-Seidel üsullarıdır. Bu üsulları kod yazaraq C, C++, MATLAB və başqa proqramlaşdırma dillərindən istifadə edərək hesablaya bilərik.

Tədqiqat nəticələri sübut edir ki, analitik həllərin mövcud olmadığı mürəkkəb həndəsi sahələr və real sərhəd şərtləri üçün sonlu fərqlər metodu praktik və dayanıqlı ədədi həll imkanı yaradır. Əldə olunan nəticələr akustika, elektromaqnit dalğalarının yayılması və digər tətbiqi riyaziyyat məsələlərində Helmholtz tipli tənliklərin modelləşdirilməsi üçün istifadə oluna bilər.

Helmholtz tənliyinin həlli üsulları analitik həllin mümkün olmadığı mürəkkəb dalğa problemlərinin modelləşdirilməsi və təhlili üçün əsas hesablama alətlərindən biridir.

Gələcək tədqiqatlarda yüksək sıralı sonlu fərqlər sxemlərinin, sürətləndirici iterativ metodların və paralel hesablama yanaşmalarının tətbiqi ilə metodun effektivliyinin daha da artırılması məqsəduyğun hesab olunur.

Ədəbiyyat

1. Antoine, X., Besse, C., & Klein, P. (2014). Absorbing boundary conditions for the Helmholtz equation: A review. *Comptes Rendus Physique*, 15(5), 460–475.
2. Brenner, S. C., & Scott, R. (2008). *The mathematical theory of finite element methods*. Springer.
3. Colton, D., & Kress, R. (2013). *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. Springer.

4. Courant, R., & Hilbert, D. (2008). *Methods of mathematical physics* (Vol. 2: Partial differential equations). Wiley-VCH.
5. El-Sayed, S. M., & Kaya, D. (2004). Comparing numerical methods for Helmholtz equation model problem. *Applied Mathematics and Computation*, 150(3), 763–773.
6. Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations* (2nd ed.). American Mathematical Society.
7. Helmholtz, H. von. (1860). *On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music*. Vieweg.
8. Iserles, A. (2009). *A first course in the numerical analysis of differential equations*. Cambridge University Press.
9. Jin, J. (2014). *The finite element method in electromagnetics* (3rd ed.). Wiley–IEEE Press.
10. Johnson, C. (2009). *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Dover Publications.
11. LeVeque, R. J. (2007). *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: Steady-state and time-dependent problems*. SIAM.
12. Nəbiyeva, İ. (2025). *Helmholtz tənliklərinin fənlərarası integrasiyası və həllinin çətinlikləri* [Elmi iş].
13. Saad, Y. (2003). *Iterative methods for sparse linear systems* (2nd ed.). SIAM.
14. Shah, N. A., El-Zahar, E. R., & Aljoufi, M. D. (2021). An efficient approach for solution of fractional-order Helmholtz equations. *Advances in Difference Equations*, 2021, Article 14.
15. Strikwerda, J. C. (2004). *Finite difference schemes and partial differential equations* (2nd ed.). SIAM.
16. Wang, K., Zhang, Y., & Guo, R. (2018). Finite difference methods for the Helmholtz equation: A brief review. *Mathematica Numerica Sinica*, 40(2).
17. Zhang, L. (2014). The finite difference method for the Helmholtz equation with applications to cloaking. *Journal of Computational Physics*, 275, 593–612.

Daxil oldu: 18.08.2025

Qəbul edildi: 09.12.2025